Théorème de réorganisation.

Benoît Guerville.

Résumé

On démontrera dans ce papier le théorème de réorganisation d'une séquence d'entier à moyenne entière en une séquence valide, par la construction d'un algorithme donnant cette réorganisation.

Avant d'entrer dans le vif du sujet et d'énoncer le théorème, rappelons deux définitions ainsi qu'une proposition qui nous sera utile lors de la preuve.

Définitions :
Une séquence $(a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{N}^n$ est valide si, et seulement $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, où α_i est le plus petit représentant positif de la classe d'équivalence de $a_i + i$ modulo n (ie $\alpha_i \equiv a_i + i \ [mod \ \ n]$ et $\alpha_i \in [0 \cdots (n-1)]$ ou encore α_i est le reste de la division euclidienne de a_i par n).
On dira qu'une séquence $(a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{N}^n$ est réorganisable s'il existe une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ tel que $(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)})$ soit valide.

Proposition :
Soit $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{N}^n$ une séquence de moyenne m entière et telle que pour (n-1) indices les α_i soient deux à deux distincts, alors A est valide.

Preuve :
Quitte à appliquer une permutation circulaire à A, on peut supposer que les α_i sont deux à deux distincts pour $i \in \{1 \cdots (n-1)\}$.
Posons β l'indice qui n'est pas dans $\{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\}$. Il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $b + n \equiv \beta \ [mod \ n]$. On a alors que $B = (a_1 \cdots, a_{n-1}, b)$ est valide, et par le thoérème de la moyenne [1] celle de B est entière. En changeant b par $b + kn \ (k \in \mathbb{Z})$ [2] , on peut supposer que la moyenne de B vaut m.
D'où $b = mn - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$ et donc $b = a_n$, ce qui implique que A=B. Et comme B est valide, alors A l'est aussi. $\square$

Théorème [3] **:** (de réorganisation)
Soit $(a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{N}$, alors il existe une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ tel que $(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)})$ soit valide.

Lemme :
Si $A = (a_1 \cdots a_n)$ et $B = (b_1 \cdots b_n)$ sont deux séquences d'entiers de moyennes entières telles que A soit réorganisable, et $a_k = b_k$ sauf pour deux indices i et j, alors B est aussi réorganisable.

Preuve du lemme :
(Toutes les opérations seront faites modulo n.)
Comme A est réorganisable, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(A) = (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)})$ soit valide. Si l'on applique σ à B, alors $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ ne diffèrent toujours que pour deux indices $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$. On peut donc supposer que A est valide.
Sous cette hypothèse, démontrons notre lemme.
Définissons d'abord les objets avec lesquels nous allons travailler.
On a la matrice suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$ où les α_i sont définit comme ci-dessus.

[1] cf [Bur] 2.4 Average theorem
[2] Ce qui ne change rien d'après la définition d'une séquence valide.
[3] Démontrer par Hall, cf [Rec] et [Bur]

Et comme A est valide, tout les α_i sont distincts. Remplaçons dans cette matrice les a_i par les b_i.

On a alors : $S = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_j & \cdots & b_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ où $\alpha_k \equiv b_k + k \; [mod \; n]$ sauf pour les deux indices i et j.

De cette matrice, on va extraire les deux colonnes i et j, que l'on va placer dans une matrice annexe M. Ce qui nous donne :
$S = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & b_n \\ \alpha_1 & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} i & j \\ b_i & b_j \\ \alpha_i & \alpha_j \end{bmatrix}$

On remarque que M verifie l'équation : (*) $i + j + b_i + b_j = \alpha_i + \alpha_j$

Maintenant nous allons créer une permutation qui conserve les propriétés de (S,M).

1ère étape :
5 cas sont possibles :
- Si $i + b_i = \alpha_i$ alors par la proposition B est déjà valide.
- Si $i + b_i = \alpha_j$ alors on inverse α_i et α_j. Et par la proposition, B est valide.
- Si $i + b_j = \alpha_i$ alors on inverse b_i et b_j. Et par la proposition, B est valide.
- Si $i + b_j = \alpha_j$ alors on inverse α_i et α_j ainsi que b_i et b_j. Et par la proposition, B est valide.
- Si aucun des cas précédent ne se passent, on passe à la seconde étape.

2nd étape :
On pose $x = \alpha_i - b_i$. D'après l'étape précédente, on sait que x est différent de i et j, en effet sinon B serai déjà valide.
Dans la colonne x, on remplace b_x par b_i, et α_x par α_i. On remarque que l'on a : $x + b_i = \alpha_i$ d'après la définition de x. Et on remplace la matrice M par : $M = \begin{bmatrix} i & j \\ b_x & b_j \\ \alpha_j & \alpha_x \end{bmatrix}$
Qui elle aussi verifie toujours l'égalité (*). En Effet :

$$\begin{aligned} i + j + b_x + b_j &= i + j + b_i + b_j + b_x - b_i \\ &= \alpha_i + \alpha_j + b_- b_i \\ &= \alpha_j + b_x + c_i - b_i \\ &= \alpha_j + b_x + x \\ &= \alpha_j + b_x + \alpha_x - b_x \\ &= \alpha_j + \alpha_x \end{aligned}$$

Si en réinjectant M dans S la permutation de B ainsi obtenue n'est pas jonglable, on recommence à la première étape.

Reste à prouver que le processus s'arrete en un nombre fini d'étape.
Nous allons donc montrer que x ne peut pas prendre plusieurs fois la même valeur.
Pour cela, raisonnons pas l'absurde. Supposons qu'il existe deux étapes auxquelles x prend la même valeur. On peut aussi supposer qu'entre ces deux étapes x ne prend que d'autres valeurs.

On a donc en premier lieu les matrices :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_x & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & b_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_x & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ et } M = \begin{bmatrix} i & j \\ b_i & b_j \\ \alpha_i & \alpha_j \end{bmatrix}$$

Et en second lieu (i.e. quand x revient pour la première fois) les matrices :

$$S' = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_i & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & b_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \oslash & \cdots & \oslash & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ et } M' = \begin{bmatrix} i & j \\ b'_i & b_j \\ \alpha'_i & \alpha'_j \end{bmatrix}$$

En effet, après avoir effectué la permutation sur les matrices M et S, on ne modifie plus la colonne x jusqu'à arriver à M' et S'. Si l'on considère, l'étape suivant la permutation sur les matrices S et M, on trouve un $x' = \alpha_j - b_x$, et α_j va dans la dernière ligne de la colonne x'. Mais comme $x = \alpha_x - b_x$ et $\alpha_j \neq \alpha_x$ alors $x \neq x'$. Donc, α_j reste dans la colonne x' tant que x ne reprend pas la valeur x'. Comme on a supposé qu'entre (S,M) et (S',M') x ne se répète pas, alors x' ne peut réapparaitre qu'après (S',M'). Et donc en (S',M'), α_j est toujours dans la colonne x'. Comme c'est la première fois que x revient, on est sûr que $\alpha_j \neq \alpha'_j$ (**).

Mais (S,M) implique $i + j + b_i + b_j = \alpha_i + \alpha_j$
et (S',M') implique $i + j + b'_i + b_j = \alpha'_i + \alpha'_j$
D'où $b_i - b'_i + b_j - b_j = \alpha_i - \alpha'_i + \alpha_j - \alpha'_j$
Or $x + b_i = \alpha_i$ et $x + b'_i = \alpha'_i$.
$\Rightarrow b_i - b'_i = x + b_i - x - b'_i + \alpha_j - \alpha'_j$
Et donc $\alpha_j = \alpha'_j$, ce qui contre-dit (**).
Donc l'algorithme se fini en un nombre fini d'étape. Et le lemme est bien démontré. $\square$

Preuve du théorème :
Soit $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{N}$. On considère la suite suivante :
$A_0 = (0 \cdots 0) \to A_1 = (a_1, \gamma_1, 0, \cdots, 0) \to A_2(a_1, a_2, \gamma_2, 0, \cdots, 0) \to \cdots \to A_{n-1} = (a_1, \cdots, a_{n-1}, \gamma_{n-1})$
où γ_k est tel que la moyenne soit entière.
Remarque : par la proposition, $\gamma_{n-1} = a_n$, et donc $A_{n-1} = A$.
On a donc A_k, A_{k+1} qui verifient les hypothèses du lemme pour tout $k \in \{0 \cdots (n-2)\}$. Or comme A_0 est valide, alors trivialement il est réorganisable. Et donc par le lemme A_1 aussi. En itérant ce raisonnement, on trouve que $A_{n-1} = A$ est aussi réorganisable.
Ce qui fini de démontrer le théorème. $\square$

Références

[Rec] Post sur Rec.Juggling du 9 février 2001 de Dean Hickerson, sur la réorganisation des séquences de moyenne entière.

[Bur] The mathmematics of Juggling. Burkard Polster.

[Arl] Explication de base du siteswaps.
http ://didier.arlabosse.free.fr/balles/liens.html